

# Zakres materiału i wymagania podstawy programowej z matematyki dla IV klasy czteroletniego liceum – zakres rozszerzony (w tym zakres podstawowy)

KLASA 4

## ZAKRES PODSTAWOWY + ZAKRES ROZSZERZONY

Przyjmujemy, że uczeń spełnia wymagania na ocenę wyższą, jeśli spełnia jednocześnie wymagania na ocenę niższą oraz dodatkowe wymagania. Proponujemy zatem:

*Wymagania na ocenę dopuszczającą (K)*

*Wymagania na ocenę dostateczną zawierają wymagania na ocenę dopuszczającą (P)*

*Wymagania na ocenę dobrą zawierają wymagania na ocenę dostateczną i dopuszczającą (R)*

*Wymagania na ocenę bardzo dobrą zawierają wymagania na ocenę dobrą, dostateczną i dopuszczającą (D)*

*Wymagania na ocenę celującą zawierają wymagania na ocenę bardzo dobrą, dobrą, dostateczną i dopuszczającą (W)*

**Uwaga:** Treści zapisane na różowym tle są powtórzeniem z klasy 1, 2 oraz 3, zakres rozszerzony.

## ELEMENTY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

1	Granica funkcji w punkcie
2	Obliczanie granicy funkcji w punkcie
3	Granice jednostronne funkcji w punkcie
4	Granica funkcji w nieskończoności
5	Granica niewłaściwa funkcji
6	Pochodna funkcji w punkcie
7	Funkcja pochodna
8	Funkcja złożona. Pochodna funkcji złożonej
9	Styczna do wykresu funkcji
10	Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji
11	Ekstrema lokalne funkcji
12	Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale
13	Zadania optymalizacyjne

**Uczeń:**

### PODSTAWOWE

K	P
uzasadnia, że funkcja nie ma granicy w punkcie, również na podstawie jej wykresu	uzasadnia, korzystając z definicji, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie
zna i rozumie pojęcie granicy funkcji w punkcie	oblicza granice funkcji w punkcie, korzystając z twierdzenia o granicach: sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji, które mają granice w tym punkcie
oblicza granice funkcji w punkcie	oblicza granice jednostronne funkcji w punkcie
zna twierdzenia dotyczące obliczania granic w punkcie	stosuje twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich do uzasadniania istnienia rozwiązania równania

**PODSTAWOWE**

K	P
oblicza granice funkcji w nieskończoności	potrafi wyznaczyć równanie stycznej do wykresu danej funkcji
oblicza granice niewłaściwe jednostronne funkcji w punkcie	potrafi zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej
oblicza granice niewłaściwe funkcji w punkcie	potrafi wyznaczyć ekstrema funkcji wymiernej
wyznacza równania asymptot pionowych wykresu funkcji	potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość danej funkcji wymiernej w przedziale domkniętym
wyznacza równania asymptot poziomych wykresu funkcji	potrafi zbadać przebieg zmienności danej funkcji wymiernej i naszkicować jej wykres
potrafi sprawnie wyznaczać pochodne funkcji wymiernych na podstawie poznanych wzorów	potrafi stosować rachunek pochodnych do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych
zna i rozumie warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej	

**DOPEŁNIAJĄCE**

R	D
stosuje twierdzenie Weierstrassa do wyznaczania wartości najmniejszej oraz największej funkcji w danym przedziale domkniętym	potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące różniczkowalności funkcji
zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech funkcjach	potrafi zastosować wiadomości o stycznej do wykresu funkcji w rozwiązywaniu różnych zadań
zna własności funkcji ciągłych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań (twierdzenie Darboux oraz twierdzenie Weierstrassa)	potrafi stosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk
potrafi stosować rachunek pochodnych w rozwiązywaniu zadań optymalizacyjnych	potrafi wyprowadzić wzory na pochodne funkcji
wyznacza punkt wykresu funkcji, w którym styczna do niego spełnia podane warunki	rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności
wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja była monotoniczna	
wyznacza wartości parametrów tak, aby funkcja miała ekstremum w danym punkcie	

**WYKRACZAJĄCE**

**W**

rozwiązuje zadania nietypowe stosując analizę matematyczną;

## TRYGONOMETRIA

1	Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – powtórzenie wiadomości z klasy 2.
2	Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych
3	Równania trygonometryczne, cz. 1
4	Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy
5	Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta
6	Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

7	Równania trygonometryczne, cz. 2
8	Pochodne funkcji trygonometrycznych

### Uczeń:

PODSTAWOWE	
K	P
zna definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;	potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ ;
potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków;	zna zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego;
potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);	potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich;
potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne;	potrafi stosować miarę łukową i stopniową kąta
zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ ;	potrafi określać w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta, mając dane wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta;
wie co to jest miara łukowa kąta;	potrafi stosować wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń;
potrafi zamieniać stopnie na radiany i radiany na stopnie	potrafi obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów, których końcowe ramię leży na prostej o równaniu $y = ax$
zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;	umie zbudować w układzie współrzędnych dowolny kąt o mierze $a$ , gdy dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej tego kąta;
umie podać znaki wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach;	potrafi posługiwać się definicjami funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta w rozwiązywaniu zadań;
potrafi obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na drugim ramieniu kąta	potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest jedna z nich;
zna tożsamości i związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;	zna i potrafi stosować wzory redukcyjne dla kątów o miarach wyrażonych w stopniach oraz radianach;
zna wzory redukcyjne;	potrafi upraszczać wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne;
potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \sin x$ i omówić jej własności;	potrafi ustalać znak i porównywać wartości funkcji trygonometrycznych dla podanych kątów, korzystając z wykresów
potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \cos x$ i omówić jej własności;	potrafi wyznaczyć zbiór wartości funkcji trygonometrycznej (w prostych przypadkach);
potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i omówić jej własności;	wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ i omówić jej własności;	
potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując takie przekształcenia, jak: symetria osiowa względem osi OX, symetria osiowa względem osi OY, symetria środkowa, względem punktu (0, 0), przesunięcie równoległe o dany wektor	potrafi rozwiązywać proste równania trygonometryczne korzystając z wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych;
zna wzory na sinus i cosinus sumy/różnicy kątów i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań;	
potrafi stosować wzory na sumę/różnicę funkcji trygonometrycznych	
DOPEŁNIAJĄCE	
R	D
potrafi skonstruować kąt, jeżeli dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych;	potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując wiedzę o figurach geometrycznych oraz trygonometrię kąta ostrego;
potrafi przeprowadzać dowody tożsamości trygonometrycznych;	potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując wcześniej zdobytą wiedzę (np. wzory skróconego mnożenia) oraz trygonometrię kąta ostrego;

**PODSTAWOWE**

K	P
potrafi rozwiązywać zadania z kontekstem praktycznym stosując trygonometrię kąta ostrego;	potrafi rozwiązywać trudne zadania, korzystając ze wzorów redukcyjnych;
wie, co to jest miara główna kąta skierowanego i potrafi ją wyznaczyć dla dowolnego kąta;	potrafi rozwiązywać trudne zadania, wykorzystując podstawowe tożsamości trygonometryczne;
potrafi obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów mając informacje pozwalające na ustalenie współrzędnych punktu znajdującego się na końcowym ramieniu kąta	potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej;
potrafi rozwiązywać zadania z zastosowaniem miary łukowej i stopniowej	potrafi określić dziedzinę funkcji i naszkicować jej wykres, w przypadkach gdy wzór funkcji wymaga przekształcenia;
potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (dla dowolnego kąta, dla którego funkcje trygonometryczne są określone)	potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując kilka przekształceń: przesunięcie wykresu o wektor oraz $y = s \cdot f(x)$ oraz $y = f(s \cdot x)$ , gdzie $s \neq 0$ ;
potrafi dowodzić tożsamości trygonometryczne:	
potrafi stosować wzory redukcyjne w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności;	
potrafi zbadać, czy funkcja trygonometryczna jest parzysta (nieparzysta);	
potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej;	
potrafi ustalać argumenty dla których wartości funkcji sinus i cosinus spełniają określone warunki;	
potrafi ustalać najmniejszą i największą wartość wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne;	
potrafi obliczać wartości wyrażeń, w których występują funkcje trygonometryczne dowolnych kątów;	
potrafi szkicować wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$ ;	
potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując jedno z przekształceń, jak przesunięcie wykresu o wektor oraz $y = s \cdot f(x)$ oraz $y = f(s \cdot x)$ , gdzie $s \neq 0$ ;	
potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując takie przekształcenia, jak: $y = s \cdot f(x)$ oraz $y = f(s \cdot x)$ , gdzie $s \neq 0$ ;	potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych;
potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych w których we wzorach występuje pierwiastek	potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta;
potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych;	potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów;
potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wykorzystaniem tożsamości trygonometrycznych	potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne w których występuje parametr
potrafi obliczyć pochodne funkcji złożonych, w których występują funkcje trygonometryczne	potrafi rozwiązywać zadania optymalizacyjne w których występują pochodne funkcji trygonometrycznych, równania trygonometryczne
potrafi wyznaczyć zbiór wartości funkcji, w których wzorze występuje funkcja trygonometryczna	

**WYKRACZAJĄCE**

**PODSTAWOWE**

**K**

**P**

**W**

potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii.

potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności lub wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod rozwiązywania

## GEOMETRIA ANALITYCZNA

1	Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka
2	Kąt między niezerowymi wektorami
3	Proste w układzie współrzędnych
4	Pole trójkąta. Pole wielokąta
5	Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu
6	Wzajemne położenie dwóch okręgów
7	Zadania różne z geometrii analitycznej
8	Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych
9	Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

**Uczeń:**

**PODSTAWOWE**

**K**

**P**

zna określenie wektora w układzie współrzędnych i potrafi podać jego cechy;

potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora

potrafi obliczyć współrzędne wektora, mając dane współrzędne początku i końca wektora

potrafi stosować własności wektorów równych i przeciwnych do rozwiązywania zadań

potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej)

potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych;

zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych w geometrii analitycznej

potrafi wyznaczyć miarę kąta nachylenia do osi OX prostej opisanej równaniem kierunkowym;

potrafi wykonywać działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (analitycznie)

potrafi napisać równanie kierunkowe prostej znając jej kąt nachylenia do osi OX i współrzędne punktu, który należy do prostej;

zna pojęcie i wzór funkcji liniowej;

potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dane dwa punkty (o różnych odciętych);

potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej (monotoniczność, położenie wykresu funkcji liniowej w ćwiartkach układu współrzędnych, zależność współrzędnych punktu przecięcia wykresu z osią y od współczynnika b);

potrafi stosować warunek równoległości oraz prostokątności prostych opisanych równaniami kierunkowymi/ogólnymi do wyznaczenia równania prostej równoległej/prostopadłej i przechodzącej przez dany punkt;

potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem;

potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do kanonicznej;

potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej;

potrafi napisać równanie okręgu mając trzy punkty należące do tego okręgu;

PODSTAWOWE

K	P
potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach;	potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń);
potrafi napisać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie;	potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń);
zna i rozumie pojęcie współliniowości punktów;	
potrafi obliczyć długość odcinka, znając współrzędne jego końców	
zna definicję równania kierunkowego prostej oraz znaczenie współczynników występujących w tym równaniu (w tym również związek z kątem nachylenia prostej do osi OX);	
zna definicję równania ogólnego prostej;	
potrafi napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez dwa punkty;	
zna warunek równoległości oraz prostokątności prostych danych równaniami kierunkowymi/ogólnymi;	
rozpoznaje równanie okręgu w postaci kanonicznej;	
potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci kanonicznej do zredukowanej;	
potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu;	
potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu;	
umie sprawdzić czy punkt należy do okręgu w postaci kanonicznej;	
potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg;	
zna i umie stosować pojęcia wektorów równych i przeciwnych	potrafi stosować w zadaniach wzory na cosinus i sinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory
potrafi wyznaczyć współrzędne początku/końca wektora mając dane jego współrzędne	potrafi zastosować w zadaniach warunki na prostokątność i równoległość wektorów
zna definicję kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory	potrafi obliczyć pole trójkąta gdy dane są jego wierzchołki
zna wzory na cosinus i sinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory	potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń)
zna warunki na prostokątność i równoległość wektorów	potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń);
zna wzór na pole trójkąta gdy dane są jego wierzchołki;	potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu;
rozpoznaje równanie okręgu w postaci kanonicznej;	potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach i okręgach;
potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu;	potrafi wyznaczyć równania okręgu w symetrii względem osi układu oraz początku układu
potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu;	
umie sprawdzić czy punkt należy do okręgu w postaci kanonicznej;	
potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg;	
zna pojęcie stycznej, siecznej i prostej rozłącznej do okręgu	

PODSTAWOWE	
K	P
potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów;	
potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych;	
potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów;	
wie, jakie przekształcenie nazywamy izometrią	
zna pojęcie jednokładności o środku S i skali $k \neq 0$ (także w ujęciu analitycznym);	
DOPEŁNIAJĄCE	
R	D
potrafi stosować własności działań na wektorach w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności	sprawdzić czy podane trzy punkty są współliniowe
potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące równoległości/prostopadłości prostych	rozwiązywać trudniejsze zadania z kontekstem praktycznym dotyczące funkcji liniowej;
potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych;	potrafi stosować wiedzę o wektorach w rozwiązywaniu zadań geometrycznych;
potrafi zastosować układy równań do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej o średnim stopniu trudności;	potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące punktu przecięcia prostych;
	potrafi zastosować układy równań do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej o wysokim stopniu trudności;
	potrafi rozwiązać różne zadania dotyczące okręgów, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki;
rozwiązuje zadania, dotyczące wektorów, w których występują parametry	potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej o podwyższonym stopniu trudności
rozwiązuje zadania z geometrii analitycznej (o średnim stopniu trudności) w rozwiązaniu których sprawnie korzysta z poznanych wzorów	potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej stosując analizę matematyczną
rozwiązuje zadania geometrii analitycznej w oparciu o wzór na pole trójkąta w układzie współrzędnych (np. gdy dane jest pole)	
stosuje równanie okręgu w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności	
dobiera tak wartość parametru, aby dane okręgi były styczne/rozłączne/przecinające się	
potrafi wykazać, że dane przekształcenie jest/nie jest izometrią	
WYKRACZAJĄCE	
W	
rozwiązuje zadania nietypowe dotyczące funkcji liniowej o podwyższonym stopniu trudności;	
potrafi wyprowadzać wzory z geometrii analitycznej (sinus i cosinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; odległość punktu od prostej)	

## FUNKCJA WYKŁADNICZA

1	Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
2	Funkcja wykładnicza i jej własności
3	Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych
4	Równania wykładnicze
5	Nierówności wykładnicze
6	Zastosowanie funkcji wykładniczej w zadaniach

### Uczeń:

PODSTAWOWE	
K	P
potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym;	
zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach;	
zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach;	
potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;	
potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym;	potrafi zapisać daną liczbę w postaci potęgi o wskazanej podstawie
stosuje własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań	potrafi uprościć wyrażenia zawierające potęgi
zna definicję funkcji wykładniczej	potrafi porównywać potęgi
potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji	potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu
potrafi obliczać wartości funkcji dla danych argumentów	potrafi wyznaczyć wzór funkcji wykładniczej w oparciu o współrzędne punktu/punktów należących do wykresu funkcji
potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw	potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych stosując przesunięcie równoległe o wektor i symetrie względem osi układu (złożenie przekształceń)
potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych ( $S_{Ox}$ , $S_{Oy}$ , $S(0,0)$ ), przesunięcie równoległe o dany wektor)	
potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych stosując przesunięcie równoległe o wektor albo symetrie względem osi układu	
zna pojęcie równania wykładniczego oraz nierówności wykładniczej	
potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności wykładnicze	
DOPEŁNIAJĄCE	
R	D
sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki;	potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym;
sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie;	porównywać wyrażenia zawierające pierwiastki;
sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym;	
potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias;	
potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną	potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze



PODSTAWOWE	
K	P
	stosując metodę podstawiania
potrafi interpretować graficznie równania wykładnicze z parametrem	potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych
potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych	potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej w różnych zadaniach (np., dotyczących ciągów, trygonometrii, itp.)
potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji wykładniczej oraz potęg	potrafi zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory punktów opisane a pomocą nierówności wykładniczych
potrafi rozwiązać równania oraz nierówności wykładnicze korzystając z wykresów odpowiednich funkcji wykładniczych	potrafi rozwiązywać zadania stosując własności funkcji wykładniczych
potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze korzystając z różnowartościowości oraz monotoniczności funkcji	potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem;
potrafi rozwiązywać nierówności łączące funkcję wykładniczą oraz inny typ funkcji (np. liniową)	potrafi wykorzystać funkcję wykładniczą do rozwiązywania zadań, o podwyższonym stopniu trudności, osadzonych w kontekście praktycznym
potrafi wykorzystać funkcję wykładniczą do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym	
WYKRACZAJĄCE	
W	
potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem o podwyższonym stopniu trudności;	
potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o podwyższonym stopniu trudności), w których wykorzystuje własności funkcji wykładniczych	

## FUNKCJA LOGARYTMICZNA

1	Logarytm – powtórzenie wiadomości
2	Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości
3	Przekształcenie wykresów funkcji logarytmicznych
4	Równania logarytmiczne
5	Nierówności logarytmiczne
6	Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

### Uczeń:

PODSTAWOWE	
K	P
zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji;	potrafi wykonywać proste działania z wykorzystaniem twierdzenia o: logarytmie iloczynu, logarytmie ilorazu, logarytmie potęgi;
zna pojęcia: podstawa logarytmu, liczba logarytmowana;	potrafi zamienić podstawę logarytmu;
zna pojęcie logarytmu dziesiętnego;	

**PODSTAWOWE**

K	P
potrafi podać założenia i zapisać w prostszej postaci wyrażenia zawierające logarytmy	stosuje do obliczeń logarytmu równości wynikające z definicji logarytmu
zna definicję funkcji logarytmicznej;	zna i potrafi stosować własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń
potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji;	potrafi stosować twierdzenie o zmianie podstaw logarytmów do obliczania wartości wyrażeń oraz przekształcania wyrażeń z logarytmami
potrafi określić dziedzinę funkcji logarytmicznej;	wyznacza podstawę logarytmu/liczbę logarytmowaną, gdy dana jest wartość logarytmu
potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;	podaje odpowiednie założenia dla dla podstawy oraz liczby logarytmowanej
potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu;	potrafi obliczyć/wyznaczyć przybliżoną wartość logarytmu mając przybliżenie innego logarytmu (np. wyznaczyć $\log_2 20$ wiedząc, że $\log_2 5 = p$ )
potrafi przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych ( $S_{0x}$ , $S_{0y}$ , $S(0,0)$ , przesunięcie równoległe o dany wektor);	potrafi wyznaczyć wzór funkcji logarytmicznej gdy dany jest punkt należący do wykresu
	potrafi wyznaczyć zbiór wartości funkcji logarytmicznej o określonej dziedzinie
	potrafi algebraicznie rozwiązywać proste równania oraz nierówności logarytmiczne;
	rozwiązuje zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym, w których wykorzystuje umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.)
	posługuje się funkcjami wykładniczymi oraz funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych itp.

**DOPEŁNIAJĄCE**

R	D
zna i potrafi stosować własności logarytmów w obliczeniach;	potrafi zapisywać wyrażenia z logarytmami z postaci jednego logarytmu;
rozwiązywać nietypowe zadania z zastosowaniem definicji logarytmu	potrafi rozwiązywać nietypowe zadania z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
potrafi przekształcić wyrażenia z logarytmami;	
potrafi stosować twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do udowadniania równości wyrażeń	potrafi udowodnić twierdzenia o logarytmach, twierdzenie o zamianie podstaw logarytmów
potrafi graficznie rozwiązywać równania, nierówności układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji logarytmicznych;	potrafi wykorzystać własności funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań z parametrem
potrafi wykorzystać własności funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań różnego typu	potrafi wykorzystać funkcję logarytmiczną do rozwiązywania zadań, o podwyższonym stopniu trudności, osadzonych w kontekście praktycznym
potrafi wykorzystać funkcję logarytmiczną do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym	potrafi prowadzić dowody opierające się o twierdzenie o zmianie podstaw logarytmów
potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji logarytmicznej	potrafi interpretować graficznie równania logarytmiczne z parametrem
potrafi rozwiązać równania oraz nierówności logarytmiczne korzystając z wykresów odpowiednich funkcji logarytmicznych	potrafi stosować wiadomości o funkcji logarytmicznej w różnych zadaniach (np., dotyczących ciągów, trygonometrii, itp.)

PODSTAWOWE	
K	P
potrafi rozwiązywać nierówności łączące funkcję logarytmiczną oraz inny typ funkcji (np. liniową)	potrafi zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory punktów opisane a pomocą nierówności logarytmicznych
potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji logarytmicznej	potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności stosując własności funkcji logarytmicznych oraz poznane twierdzenia
potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną	potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem;
potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z wartością bezwzględną	potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne wprowadzając zmienną pomocniczą;
potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności logarytmicznych	potrafi naszkicować zbiór punktów płaszczyzny spełniających dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi, w których występują logarytmy
potrafi rozwiązywać równania wykładniczo-potęgowo-logarytmiczne	
WYKRACZAJĄCE	
W	
potrafi wykorzystać pojęcie logarytmu w zadaniach praktycznych.	
potrafi rozwiązywać zadania z kontekstem praktycznym z zastosowaniem własności logarytmów;	
potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem;	
potrafi udowodnić niewymierność logarytmu (np. $\log_2 3$ )	
potrafi w dowodach o podwyższonym stopniu trudności korzystać z twierdzeń i własności funkcji logarytmicznej	

## ELEMENTY STATYSTYKI

1	Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
2	Średnia z próby
3	Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa

### Uczeń:

PODSTAWOWE	
K	P
zna podstawowe pojęcia statystyki opisowej: obserwacja statystyczna, populacja generalna, próba, liczebność próby, cecha statystyczna (mierzalna, niemierzalna)	potrafi interpretować dane statystyczne odczytane z tabel, diagramów i wykresów
zna i rozumie pojęcie skali centylowej	potrafi określać zależności między odczytanymi danymi;
zna i rozumie pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej	potrafi interpretować średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę
potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów	wykorzystuje w zadaniach średnią arytmetyczną
potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów;	wykorzystuje w zadaniach medianę i dominantę
potrafi interpretować wymienione wyżej parametry statystyczne.	wyznacza modę i medianę danych przedstawionych diagramami

PODSTAWOWE	
K	P
potrafi policzyć średnią arytmetyczną zestawu danych	wyznacza modę i medianę pogrupowanych danych
wyznacza medianę i dominantę zestawu danych	stosuje w zadaniach średnią ważoną
potrafi obliczyć średnią ważoną zestawu liczb z podanymi wagami	
DOPEŁNIAJĄCE	
R	D
potrafi rozwiązywać zadania ze statystyki opisowej o średnim stopniu trudności.	potrafi stosować wiadomości ze statystyki w różnych nietypowych zadaniach
oblicza średnią arytmetyczną danych przedstawionych w niestandardowy sposób	wykorzystuje w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności pojęcia statystyczne
rozwiązuje nietypowe zadania w których występuje średnia ważona	

## RACHUNEK PRAWDOPODOBIĘSTWA

1	Kombinatoryka – powtórzenie wiadomości
2	Doświadczenie losowe
3	Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
4	Określenie prawdopodobieństwa
5	Prawdopodobieństwo klasyczne
6	Doświadczenie losowe wieloetapowe
7	Prawdopodobieństwo warunkowe
8	Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa
9	Niezależność zdarzeń
10	Schemat Bernoulliego

### Uczeń:

PODSTAWOWE	
K	P
zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się;	wyznacza sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń
potrafi określić zbiór wszystkich zdarzeń danego doświadczenia losowego, obliczyć jego moc oraz obliczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu;	potrafi zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń
zna pojęcie zdarzenia niemożliwego i pewnego; potrafi podać przykłady takich zdarzeń	potrafi sprawdzić, czy zdarzenia się wykluczają
potrafi stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa w rozwiązaniach zadań;	potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące niezależności zdarzeń.
zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa	zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań;

**PODSTAWOWE**

K	P
umie obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego	zna określenie prawdopodobieństwa warunkowego i umie rozwiązywać proste zadania dotyczące takiego prawdopodobieństwa;
zna definicję prawdopodobieństwa warunkowego	rozwiązuje proste zadania za pomocą drzewa stochastycznego;
potrafi podać pary zdarzeń przeciwnych i wykluczających się	wykorzystuje regułę mnożenia, dodawania, permutacje i kombinacje do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń w prostych zadaniach
zna wzór na prawdopodobieństwo całkowite	potrafi zastosować prawdopodobieństwo całkowite w rozwiązaniu prostych zadań;
potrafi sprawdzić, czy są spełnione założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym	zna wzór Bayesa
wie, jakie zdarzenia nazywamy niezależnymi; potrafi zbadać, postępując się definicją, czy dwa zdarzenia są niezależne;	potrafi rozwiązywać zadania w których występują zdarzenia niezależne
	zna wzór Bernoulliego i oblicza prawdopodobieństwo sukcesu i porażki w pojedynczej próbie Bernoulliego

**DOPEŁNIAJĄCE**

R	D
umie udowodnić własności prawdopodobieństwa;	stosuje własności prawdopodobieństwa w dowodach twierzeń
umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań „teoretycznych”;	stosuje wzór do Bayesa do obliczania prawdopodobieństwa przyczyny
rozwiązuje zadania z rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopniu trudności	oblicza prawdopodobieństwo w doświadczeniach wieloetapowych
potrafi obliczać prawdopodobieństwo całkowite zdarzeń	wykorzystuje wzór Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa co najmniej k sukcesów w n próbach
potrafi stosować wzór Bayesa;	rozwiązuje zadania z rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności
wie i rozumie na czym polega niezależność n zdarzeń ( $n \geq 2$ ).	prowadzi dowody wykorzystujące własności prawdopodobieństwa i poznane wzory
Wykorzystuje regułę mnożenia, dodawania, permutacje i kombinacje do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń w zadaniach o średnim stopniu trudności	
stosuje wzór na prawdopodobieństwo warunkowe do wyznaczania prawdopodobieństwa sumy, iloczynu i różnicy zdarzeń	
stosuje wzór Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa k sukcesów w n próbach	

**WYKRACZAJĄCE**

W
potrafi udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa;
potrafi udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite
udowadnia wzór Bayesa
potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

## GEOMETRIA PRZESTRZENNA. WIEŁOŚCIANY

1	Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne.
2	Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni.
3	Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę
4	Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych
5	Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny.
6	Gnaniastostupy
7	Ostrostupy
8	Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu
9	Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów
10	Przekroje wielościanów - konstrukcje
11	Przekroje wielościanów - zadania

### Uczeń:

PODSTAWOWE	
K	P
potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni	potrafi sprawdzić, czy istnieje gnaniastostup o danej liczbie krawędzi
potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni	oblicza pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej gnaniastostupa prostego oraz ostrostupa
potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni	stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni gnaniastostupa oraz ostrostupa
rysuje figury płaskie w rzucie równoległym na płaszczyznę	oblicza długości przekątnych gnaniastostupa prostego również z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii
umie scharakteryzować prostopadłość prostej i płaszczyzny	oblicza objętość gnaniastostupa prostego oraz ostrostupa prawidłowego
umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn	oblicza objętość gnaniastostupa pochyłego
rozumie pojęcie odległości punktu od płaszczyzny oraz odległości prostej równoległej do płaszczyzny od tej płaszczyzny	oblicza pole powierzchni ostrostupa mając daną jego siatkę
zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych	potrafi rozpoznać w gnaniastostupach i ostrostupach kąt między ścianami oraz obliczyć miarę tego kąta;
rozumie pojęcie kąta między prostą a płaszczyzną	
rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem "kąt liniowy kąta dwuściennego"	
zna określenie gnaniastostupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość gnaniastostupa	
zna podział gnaniastostupów	
umie narysować siatki gnaniastostupów prostych	
potrafi narysować siatkę gnaniastostupa prostego, mając dany jej fragment	
potrafi narysować siatkę ostrostupa prostego, mając dany jej fragment	
zna określenie ostrostupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość	

PODSTAWOWE	
K	P
ostrosłupa;	
zna podział ostrosłupów;	
umie narysować siatki ostrosłupów prostych;	
potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.) oraz obliczyć miary tych kątów;	
potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (kąty między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) oraz obliczyć miary tych kątów;	
umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych graniastosłupów	
umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów	
DOPEŁNIAJĄCE	
R	D
przeprowadza wnioski dotyczące położenia prostych w przestrzeni	przeprowadza dowód twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny
stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych do uzasadniania prostopadłości prostych	rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na objętość i pole powierzchni graniastosłupa prostego
stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych do rozwiązywania zadań	rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na objętość i pole powierzchni ostrosłupa
rozwiązuje zadania dotyczące miar kąta między prostą a płaszczyzną, również z wykorzystaniem trygonometrii	przeprowadza dowód twierdzenia o trzech prostych prostopadłych
rozwiązuje zadania dotyczące miary kąta dwuściennego	rozwiązuje zadania dotyczące przekrojów wielościanów z wykorzystaniem poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii
oblicza objętości graniastosłupów oraz ostrosłupów z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii	wykorzystuje wiadomości z analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań ze stereometrii, w zakresie wielościanów
potrafi wyznaczać przekroje wielościanów;	
potrafi obliczyć pole powierzchni przekroju bryły daną płaszczyzną (graniastosłupa, ostrosłupa)	
potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań;	
potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii;	
WYKRACZAJĄCE	
W	
potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń	

## GEOMETRIA PRZESTRZENNA. BRYŁY OBROTOWE

1	Walec
2	Stożek
3	Kula i sfera
4	Bryły obrotowe – zadania różne
5	Podobieństwo figur w przestrzeni
6	Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

### Uczeń:

#### PODSTAWOWE

K	P
zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, oś obrotu walca	potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń z geometrii płaskiej
rozumie określenie "przekrój osiowy walca"	rozwiązuje zadania dotyczące rozwinięcia powierzchni bocznej walca oraz powierzchni bocznej stożka
zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu stożka;	stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości brył obrotowych (stożka, kuli, walca)
rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oraz oblicza miary tych kątów	wyznacza skalę podobieństwa brył podobnych
zna określenie kuli	potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań
rozumie pojęcie objętości bryły	
umie obliczyć objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca)	

#### DOPEŁNIAJĄCE

R	D
określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną	potrafi rozwiązywać zadania, w których jedna bryła jest wpisana w drugą lub opisana na niej (ostrosłup wpisany w kulę; kula wpisana w stożek, ostrosłup opisany na kuli, walec wpisany w stożek itp.)
potrafi obliczyć pole powierzchni przekroju bryły daną płaszczyzną (walca, stożka, kuli);	rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące brył obrotowych (stożka, kuli, walca)
potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach zadań	rozwiązuje zadania z geometrii przestrzennej stosując analizę matematyczną
potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii	

#### WYKRACZAJĄCE

W
potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń
wyprowadza wzory na objętość i pole powierzchni nietypowych brył, np. stożka ściętego
rozwiązuje zadania nietypowe z geometrii przestrzennej stosując analizę matematyczną